Réduction de Jordan par dualité

Leçon : 148, 151, 153, 154, 157, 155, 159

Réf : Rombaldi

Théorème 1 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme caractéristique scindé,
$$\chi_u(X) = \prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)^{\alpha_k}, \quad \alpha_k \geq 1, \ \lambda_k \in \mathbb{K} \text{ 2 à 2 } \neq.$$

Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est de la forme
$$\begin{pmatrix} J_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J_p \end{pmatrix} \text{ où}$$

$$\forall k \in [\![1, p]\!], \quad J_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & & (0) \\ \varepsilon_{k,1} & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \varepsilon_{k,\alpha_k} & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_k}(\mathbb{K})$$

où $\varepsilon_{k,i} \in \{0,1\}$.

On va d'abord faire le cas où u est nilpotent. On utilise deux lemmes.

Lemme 2 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$. Pour tout vecteur $x \in E$ tel que $u^{q-1}(x) \neq 0$, la famille $(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est libre et l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(x, \dots, u^{q-1}(x))$ est stable par u.

Preuve

On note $\mathcal{B}_{u,x} := (x, \dots, u^{q-1}(x))$. $u^{q-1} \neq 0$, il existe donc $x \in E$ tq $u^{q-1}(x) \neq 0$. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1}) \in \mathbb{K}^q$ tq $\sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i u^i(x) = 0$.

On applique u^k, on a $\sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i u^{k+i}(x) = 0$.

Alors pour $k = q-1$, comme $u^q = 0$, on a $\lambda_0 = 0$

——— $k = q-2$ ——— $\lambda_1 = 0$

...

Ainsi $\lambda_0 = \dots = \lambda_{q-1} = 0$, donc $\mathcal{B}_{u,x}$ est libre.

La stabilité de $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_{u,x})$ est claire, car $u^q(x) = 0$.

$\square$

Lemme 3 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$. Il existe $\varphi \in E^*$ et $x \in E$ tels que $F = \mathrm{Vect}(x, \dots, u^{q-1}(x))$ et l'orthogonal G dans E de $H = \mathrm{Vect}(\varphi, {}^t u(\varphi), \dots, ({}^t u)^{q-1}(\varphi))$ sont stables par u et $E = F \oplus G$.

Preuve

On a : - $G = \{y \in E : \forall \varphi \in H \ \varphi(y) = 0\}$.

- $\dim G = \dim E - \dim H$

- ${}^t u : \varphi \in E^* \mapsto \varphi \circ u$, et $({}^t u)^k = {}^t(u^k)$.

Clairement, H est stable par ${}^t u$, car $({}^t u)^q = {}^t(u^q) = 0$.

Mq G est alors stable par u.

Soit $y \in G$, et $\varphi \in H$. Alors $\varphi(u(y)) = \varphi \circ u(y)$
$= {}^t u(\varphi)(y)$

Or $\varphi \in H$ donc ${}^t u(\varphi) \in H$, donc comme $y \in G = H^\perp$, $\varphi(u(y)) = 0$.

Ainsi $u(G) \subset G$. De même, on a vu que $u(F) \subset F$.

${}^t u$ est nilpotent, donc il existe $\varphi \in E^*$ tq $({}^t u)^{q-1}(\varphi) \neq 0$, et il existe (d'ordre q)

$x \in E$ tq $({}^t u)^{q-1}(\varphi)(x) = \varphi(u^{q-1}(x)) \neq 0$. Donc nécessairement $u^{q-1}(x) \neq 0$.

Par le lemme, F et H sont de dimension q.

et H stable par ${}^t u \Rightarrow G = H^\perp$ stable par u.

On a $\dim E = \dim G + \dim H = \dim G + \dim F$.

Mq $F \cap G = \{0\}$. Soit $y \in F \cap G$.

On écrit $y = \sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i u^i(x) \in F \cap G$. G est stable par u, donc

$u^{q-1}(y) \in G$, car $u^{q-1}(y) = \lambda_0 u^{q-1}(x)$, et $\varphi(u^{q-1}(y)) = 0$, $u^{q-1}(y) \in G$

mais $\varphi(u^{q-1}(y)) = \lambda_0 \underbrace{\varphi(u^{q-1}(x))}_{\neq 0}$. $\left(= \lambda_0 ({}^t u)^{q-1}(\varphi)(x)\right)$.

Donc $\lambda_0 = 0$. De proche en proche, $\lambda_0 = \dots = \lambda_{q-1} = 0$, donc $y = 0$.

Ainsi $E = F \oplus G$.

$\square$

Théorème 4 (pour les nilpotents)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice $q \geq 1$. Il existe alors une base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ tq chaque sev $E_i := \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_i)$ soit stable par u et

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u|_{E_i}) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{q_i}(\mathbb{K}),\ q_i = \dim E_i$$

Preuve

Par récurrence sur $n = \dim E$.

I- Pour $n = 1$, on a $u = 0$ donc OK

H- Soit $n \geq 2$. Si le résultat est vrai pour les espaces de dimension $\leq n-1$.

On reprend les notat° du lemme 3. Alors $u|_F$ (F stable par u) a pour matrice dans la base $\mathcal{B}_1 = (x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$:

$$J_q = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_q(\mathbb{K}).$$

Si $q = n$: c'est fini. Sinon on complète cette base par une base $\mathcal{B}_G$ de G, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_G}(u) = \begin{pmatrix} J_q & 0 \\ 0 & A_{n-q} \end{pmatrix}$ car G stable par u.

avec A_{n-q} la matrice de $u|_G$ dans $\mathcal{B}_G$ $\to$ matrice nilpotente de dimension < 1. On conclut par HR.

$\square$

Retour au théorème 1 :

On a $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$, $N_k := \mathrm{Ker}(u - \lambda_k \mathrm{Id})^{\alpha_k}$.

$\dim N_k = \alpha_k$, N_k stable par u, λ_k unique vp de $u|_{N_k}$.

→ et $u-\lambda_k Id|_{N_k}$ nilpotente, (d'indice β_k si $\Pi_u(X) = \prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)^{\beta_k}$).

→ ∃ base $\mathcal{B}_k$ de N_k tq $Mat_{\mathcal{B}_k}(u-\lambda Id|_{N_k}) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{k,2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{k,\alpha_k} \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

Ne pas faire le lemme 2 si on veut bien détailler le passage de nilpotent au cas général.